

## ESTUDIO DIDÁCTICO SOBRE PUNTOS Y RECTAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

Luz Esmeralda Reyes García, Flor Monserrat Rodríguez Vásquez

luzes\_rega@hotmail.com, flor.rodriguez@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero

Básico-Superior

### Resumen

En este trabajo se presentan los avances de un proyecto de investigación referente al análisis de los libros de texto en la temática: *puntos y rectas notables del triángulo*. Este análisis se realizará desde nivel primaria hasta nivel superior en México, con el objetivo de observar su tratamiento y los cambios conceptuales que se presentan en los diferentes niveles educativos, así como su posible vinculación con las concepciones que se encuentran en los estudiantes sobre este tema. Para tal efecto, se utilizará como técnica el Análisis de Contenido y el Análisis de textos.

**Palabras clave:** *Libros de texto, análisis de contenido, puntos y rectas notables del triángulo.*

### 1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la geometría es importante porque introduce al individuo al desarrollo del pensamiento matemático, pues implica el uso del razonamiento deductivo, imaginación deductiva y visualización de imágenes, los cuales son requeridos en otras ramas de las Matemáticas Brousseau (2003). En el sistema educativo mexicano, su estudio empieza a abordarse desde el nivel preescolar con la clasificación de figuras como: triángulos, círculos, rombos, etc., y culmina hasta el nivel universitario con conceptos más abstractos. Sin embargo, diversos estudios sostienen que existen dificultades en los problemas que involucran conceptos geométricos tal como lo señala Oliver (2003).

Esta rama de las matemáticas es muy amplia, sin embargo, el estudio únicamente se enfocará a la temática: *puntos y rectas notables del triángulo*, que son las medianas y baricentro, mediatrices y circuncentro, alturas y ortocentro, bisectrices e incentro. Estos conceptos los consideramos de gran importancia, porque son la base para la comprensión de estudios posteriores y más avanzados en esta área. Algunos de sus usos se relacionan con encontrar el área de algunas figuras como en triángulos, rectángulos, trapecios, paralelogramos, o el volumen de algunos cuerpos geométricos como en conos, cilindros, prismas regulares, entre otros, o cuando se quiere encontrar el centro de gravedad de una figura triangular, por ejemplo. Sin embargo, la experiencia que se ha tenido como estudiante y docente, así como diversas investigaciones realizadas en el área, han permitido identificar dificultades relacionadas con problemas de definición, interpretación y aplicación de conceptos que son tratados en cursos de geometría, las dificultades que hasta ahora se han encontrado están relacionadas con el estudio de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices, pues en muchas ocasiones se presupone que todas son siempre interiores al triángulo y la dificultad que se presenta en los alumnos es para trazar alturas a los lados de un triángulo obtusángulo o el caso del triángulo rectángulo en el que dos alturas coinciden con los lados, Rico y Vaquero (2009).

Estudios como los de Barrantes y Zapata (2008), sostienen que algunas de estas dificultades son generadas en el propio proceso de aprendizaje o por la utilización exclusiva del libro de texto y la no utilización de otros recursos o materiales que amplíen el esquema conceptual del alumno.

En este sentido, autores como Ruesga, Valls y Rodríguez (2006), afirman que los libros de texto constituyen los materiales curriculares con mayor incidencia cuantitativa y cualitativa en el aprendizaje del alumnado dentro del aula. Se estima que en ocasiones los libros de texto llegan a condicionar de forma importante el tipo de enseñanza que se realiza, puesto que muchos enseñantes los usan de manera cerrada. Otros investigadores como (García y Beas, 1995, citado en Maz, 2009), señalan que indagar sobre los libros de texto resulta importante, en primer término, porque es sabido que en toda sociedad es primordial la transmisión de su cultura; y han sido los libros de texto uno de los principales instrumentos que han colectivizado la cultura y contribuido a la difusión de los conocimientos, transmitiendo información con alguna intencionalidad. Así mismo, (Lizcano, 1993, citado en Maz, 2009), sostiene que en la construcción de conceptos en el conocimiento científico y particularmente en el matemático, el lenguaje asume un importante papel mediador, donde su referente es el lenguaje textual, pues es en el texto donde “*efectivamente se producen las matemáticas*” lo cual cobra importancia del análisis de los libros de texto de matemáticas. González (2002), por su parte, señala que son los libros de texto los que establecen el tipo de actividad que debe realizar el alumno y la forma en que se estructuran los conceptos matemáticos.

De acuerdo a estas investigaciones se pretende realizar un análisis sobre textos matemáticos (libros), donde se aborde específicamente el tema sobre puntos y rectas notables del triángulo con el objetivo de observar su tratamiento y cambios que se dan en los diferentes niveles educativos, así como su posible vinculación con las concepciones que se encuentran en los estudiantes sobre este tema. Para tal efecto, se utilizará como técnica el Análisis de Contenido y recurriremos a la metodología de análisis de textos que plantea Rodríguez-Vásquez (2010).

## 2. MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

Este trabajo se fundamenta en el Análisis de Contenido y en la Metodología de Análisis de textos. Existen varias acepciones a lo que se refiere el análisis de contenido. Gómez (2002), señala el análisis de contenido es un análisis de las matemáticas escolares. Su propósito es la descripción de la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula. Por tanto, en el análisis de contenido se busca identificar y describir estructuradamente los diversos significados matemáticos de la estructura matemática. Este análisis se hace desde la perspectiva de las matemáticas escolares y tiene en cuenta tres tipos de significados: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (análisis fenomenológico).

La estructura conceptual, como herramienta para el análisis de las matemáticas escolares, es la descripción, a nivel de conceptos y relaciones entre ellos, de la estructura matemática en cuestión.

Se utilizan los sistemas de representación para representar diferentes facetas de un concepto o estructura matemática.

El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste en describir cuáles son los fenómenos (naturales, sociales y matemáticos) para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto y la estructura con esos fenómenos.

Otras posturas como Piñuel (2002), afirma que se suele llamar *Análisis de Contenido* al conjunto de procedimientos interpretativos de *productos comunicativos* (mensajes, textos o discursos) que proceden de procesos singulares de comunicación previamente registrados, y que, basados en

técnicas de medida, a veces *cuantitativas* (estadísticas basadas en el recuento de unidades), a veces *cualitativas* (lógicas basadas en la combinación de categorías) tienen por objeto elaborar y procesar datos relevantes sobre las condiciones mismas en que se han producido aquellos textos, o sobre las condiciones que puedan darse para su empleo posterior.

Los componentes del análisis de contenido son:

a) Determinar el objeto o tema de análisis

Determinar ¿cuál es el objeto o tema de análisis?, significa preguntarse por las siguientes cuestiones: ¿qué se quiere investigar?, ¿qué bibliografía o conocimientos previos existen?, ¿en qué teoría o marco teórico encaja?, ¿qué texto o textos se van a utilizar?, y ¿cuál es la unidad de análisis que se va a utilizar?

b) Determinar el sistema de codificación

Es el proceso por el cual las características relevantes del contenido de un mensaje son transformadas a unidades que permitan su descripción y análisis preciso.

c) Determinar el Sistema de Categorías

La categorización “es una operación de clasificación de elementos constitutivos de un conjunto por diferenciación, tras la agrupación por analogía, a partir de criterios previamente definidos”. Clasificar elementos en categorías impone buscar lo que cada uno de ellos tiene en común con los otros. Lo que permite este agrupamiento es la parte que tienen en común entre sí.

d) Comprobar la fiabilidad del sistema de codificación-categorización

La importancia de la fiabilidad procede de la seguridad de ofrecer que los datos han sido obtenidos con independencia del suceso, instrumento o persona que los mide.

e) La inferencia

Inferir es explicar, deducir lo que hay en un texto. El analista de contenido busca algunas conclusiones o extrae inferencias o explicaciones “contenidas” explícitas o implícitas en el propio texto.

Particularmente en el estudio que desarrollaremos, se utilizará como técnica el Análisis de Contenido, en el sentido de Gómez (2002) y de Piñuel (2002) y recurriremos a la metodología de análisis de textos que plantea Rodríguez-Vásquez (2010), en la cual se tiene como campos de análisis: la ficha de referencia del texto, con lo cual se conocerá la ubicación del libro y el contexto en general; el análisis conceptual, donde enfatizaremos sobre la definición y organización del concepto, el tipo de representación, función de los problemas y ejercicios resueltos o propuestos; el análisis didáctico, para mostrar los objetivos que el autor pretende alcanzar; y finalmente el análisis fenomenológico, para mostrar los fenómenos (si los hay) que se toman en consideración con respecto al concepto en cuestión.

### **3. RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO EN LOS PLANES Y PROGRAMAS DE ESTUDIO**

Como ya se mencionó, el estudio se realizará desde nivel primaria hasta nivel superior, sin embargo, para delimitar nuestra muestra, se analizarán los libros de nivel primaria de la reforma vigente 2011, el criterio para elegir qué libros de texto de nivel secundaria, medio superior y superior será a partir de los autores y libros que se recomiendan como bibliografía básica en sus programas de estudio y se tomarán en cuenta también las editoriales de reconocido prestigio.

Asimismo consideramos que los libros que usa el profesor para la instrucción didáctica es de suma importancia, por tal motivo también entrevistamos a algunos profesores que tienen o tuvieron a su cargo la unidad de aprendizaje de geometría plana.

Ahora bien, para el desarrollo de la investigación hemos realizado, al momento, una revisión de los siguientes programas de estudio:

**Nivel primaria:** SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Educación Básica Primaria*. México.

**Nivel secundaria:** SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria*. México.

**Nivel medio superior:** UAG (2010). *Plan de estudios por competencias de Educación Media Superior*. México: UAG.

**Nivel superior:** UAG (2008). *Elementos de geometría. Educación superior*. México: UAG.

Estas revisiones las hicimos con el fin de reconocer los conceptos exclusivos de la temática rectas y puntos notables del triángulo en el discurso matemático escolar, como son las medianas y baricentro, mediatrices y circuncentro, alturas y ortocentro, bisectrices e incentro, además de reconocer sus antecedentes y precedentes temáticos, y la orientación que sugiere el programa para su introducción en el aula. Asimismo nos permitiría conocer la bibliografía recomendada y en consecuencia parte de la muestra de los libros a analizar.

Cabe mencionar que los planes y programas de estudio de nivel primaria y secundaria son únicos y se utilizan en todo el país (México), sin embargo, los planes y programas del nivel medio no son iguales, así como también los del nivel superior, cada universidad de cada estado tiene uno propio. Por el momento se han revisado únicamente los de la Universidad Autónoma de Guerrero. Sin embargo estamos en revisión de otros que ofertan las universidades como la UNAM, el Politécnico, entre otras, para conocer en la bibliografía recomendada los libros que sugieren para la enseñanza de la geometría.

El análisis de estos planes y programas de estudio reporta lo siguiente:

En nivel primaria se inicia a trabajar en tercer grado con ideas intuitivas de la recta notable (altura) con la obtención de ángulos de  $90^\circ$  a través del doblado del papel, posteriormente en quinto grado con la identificación de rectas perpendiculares, asimismo, con el trazo de las alturas en diferentes triángulos así como su definición.

En nivel secundaria, esta temática se trabaja en primer grado. A diferencia del nivel primaria aquí se da el trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo, así como la resolución de problemas geométricos que impliquen el uso de las propiedades de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.

En nivel medio superior, su enseñanza se propone en el tercer semestre, el cual corresponde a la unidad de aprendizaje matemáticas III, según el plan revisado del sistema de bachillerato de la UAG, llamándoseles, líneas notables del triángulo.

Finalmente en nivel superior, esta temática se ubica en la unidad 3, del plan de estudios de la licenciatura en matemáticas de la UAG y se le llama “puntos y rectas notables del triángulo”, dentro de esta unidad se tienen las medianas y el baricentro, las bisectrices y el incentro, las

alturas y el ortocentro, las mediatrices y el circuncentro, circunferencias excritas y las simedianas.

Algunos de los libros a analizar Se presentan en la siguiente tabla:

Nivel	Libros de texto
Primaria	<ul style="list-style-type: none"> <li>SEP. (2011). <i>Matemáticas. Primer grado</i>. México.</li> <li>SEP. (2011). <i>Matemáticas. Segundo grado</i>. México.</li> <li>SEP. (2011). <i>Matemáticas. Tercer grado</i>. México.</li> <li>SEP. (2011). <i>Matemáticas. Cuarto grado</i>. México.</li> <li>SEP. (2011). <i>Matemáticas. Quinto grado</i>. México.</li> <li>SEP. (2011). <i>Matemáticas. Sexto grado</i>. México.</li> </ul>
Secundaria	<ul style="list-style-type: none"> <li>Trigueros, M., Lozano, M., Schulmaister, N., Sandoval, I., Jinich, E., Cortés, M. (2011). <i>Matemáticas 2</i>. México: Ed. Santillana.</li> <li>Farfán, R.M. (Directora), Cantoral, R., Cabañas, G. &amp; Ferrari, M. (2012). <i>Matemáticas 2. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del Pensamiento Matemático</i>. México: McGraw Hill.</li> <li>Farfán, R.M. (Directora), Cantoral, R., Cabañas, G. &amp; Ferrari, M. (2011). <i>Matemáticas 1. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del Pensamiento Matemático</i>. México: McGraw Hill.</li> <li>Cabañas, G., Cantoral, R., Castañeda, A., Farfán, R. M. (Directora), Ferrari, M., Lezama, J., Martínez, G. y Montiel, G. (2008). <i>Matemáticas 3. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del Pensamiento Matemático</i>. México: McGraw Hill.</li> </ul>
Nivel medio superior	<ul style="list-style-type: none"> <li>Cuellar, A. (2006). <i>Geometría y Trigonometría</i>. México. Mc-Graw Hill.</li> <li>Clemens, S. R. et. al. (2001). <i>Geometría. con Aplicaciones y Solución de Problemas</i>. USA. Addison-Wesley Iberoamericana.</li> <li>García, J. (1995). <i>Geometría y Experiencias</i>, México, Alambra Mexicana.</li> </ul>
Nivel superior	<ul style="list-style-type: none"> <li>Vega, L. y Puertas, M. (1991). <i>Elementos. Libros I-IV</i>. España: Gredos.</li> <li>Vega, L. y Puertas, M. (1991). <i>Elementos. Libros V-IX</i>. España: Gredos.</li> <li>Shively, L. (1984). <i>Introducción a la geometría moderna</i>. México: continental.</li> </ul>

#### 4. A MANERA DE CONCLUSIÓN

La importancia de realizar investigaciones sobre el contenido y estructura de los libros, puede apreciarse en trabajos como los de Ruesga, Valls y Rodríguez (2006), González (2002); García y Beas (1995), citado en Maz (2009), ya que se manifiesta el libro como un recurso para el docente, para el estudiante, así como también como apoyo para los padres de familia, pues es cierto que el libro constituye una de las fuentes primordiales de información del conocimiento y es guía fundamental para los usuarios.

Particularmente, en el área de matemáticas es donde se han presentado con mayor frecuencia en todos los niveles educativos dificultades para la comprensión de los conceptos matemáticos, estudios como los de Barrantes y Zapata (2008), sostienen que algunas de estas dificultades a veces son generadas en el propio proceso de aprendizaje o por la utilización exclusiva del libro de texto y la no utilización de otros recursos o materiales que amplíen el esquema conceptual del alumno, es por ello que consideramos pertinente realizar investigaciones centradas al análisis de textos matemáticos, con el propósito de observar el tratamiento de los conceptos que se enseñan, específicamente el de rectas y puntos notables.



## 5. REFERENCIAS

- Barrantes, M. y Zapata, M. A. (2008). Obstáculos y Errores en la Enseñanza-Aprendizaje de las Figuras Geométricas. *CAMPO ABIERTO*, 27(1), 55-71.
- Brousseau, G. (2003). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire: l'étude de l'espace et de la géométrie*. Recuperado el 13 mayo, 2013 de [http://dipmat.math.unipa.it/~grim/home\\_brousseau.htm](http://dipmat.math.unipa.it/~grim/home_brousseau.htm).
- Cantoral, R., Cabañas, G., Castañeda, A., Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G., Montiel, G. y Ferrari, M. (2008). *Matemáticas 3. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: McGraw Hill.
- Cantoral, R., Castañeda, A., Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G., Montiel, G. y Sánchez, M. (2012). *Matemáticas 2. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: McGraw Hill.
- Cantoral, R., Castañeda, A., Cabañas, G., Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G., Montiel, G., Molina, J. y Sánchez, M. (2011). *Matemáticas 1. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: McGraw Hill.
- Clemens, S. R., O'Daffer, P., Cooney, T. (2001). *Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas*. USA. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Cuellar, A. (2006). *Geometría y Trigonometría*. México. Mc-Graw Hill.
- García, J. (1995). *Geometría y Experiencias*, México, Alambra Mexicana.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-292.
- González, M. T. (2002). *El Análisis Matemático en los libros de texto de España*. Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca.
- Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). Santander: SEIEM.
- Oliver, M. (2003). Análisis del Tratamiento de algunos temas de Geometría en Textos Escolares para el tercer ciclo de la Educación General Básica. *Revista Iberoamericana de Educación* (ISSN: 1681-5653). Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.
- Piñuel, J. L. (2002). *Epistemología, metodología y técnicas del Análisis de Contenido*. Departamento de Sociología IV. Facultad de CC. de la Información. Universidad Complutense de Madrid. Recuperado el 12 junio, 2013 de, <http://personales.jet.es/pinuel.raigada/A.Contenido.pdf>
- Rico, J., Vaquero E., (2009). *Construcción de los puntos y rectas notables del triángulo por medio del programa matemático carmental*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.
- Rodríguez-Vásquez, F. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico*. Tesis doctoral. Tesis y disertaciones académicas Universidad de Salamanca (España). Recuperado el 2 mayo, 2013 de: <http://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/76557>.



- Ruesga, P. Valls, F. y Rodríguez, T. (2006). Un instrumento para seleccionar libros de texto de Matemáticas. Aplicación al bloque curricular de Geometría. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 9(1), 1-13.
- SEP. (2011). Matemáticas. Cuarto grado. México.
- SEP. (2011). Matemáticas. Primer grado. México.
- SEP. (2011). Matemáticas. Quinto grado. México.
- SEP. (2011). Matemáticas. Segundo grado. México.
- SEP. (2011). Matemáticas. Sexto grado. México.
- SEP. (2011). Matemáticas. Tercer grado. México.
- SEP. (2011). *Programas de estudio 2011. Educación Básica Primaria*. México.
- SEP. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria*. México.
- Shively, L. (1984). *Introducción a la geometría moderna*. México: continental.
- Trigueros, M., Lozano, M., Schulmaister, N., Sandoval, I., Jinich, E., Cortés, M. (2011). *Matemáticas 2*. México: Santillana.
- UAG (2010). *Plan de estudios por competencias de Educación Media Superior*. México: UAG.
- UAG (2008). *Elementos de geometría. Educación superior*. México: UAG.
- Vega, L. y Puertas, M. (1991). *Elementos. Libros I-IV*. España: Gredos.
- Vega, L. y Puertas, M. (1991). *Elementos. Libros V-IX*. España: Gredos.